96. 抽象空間ノ full normality ニ就テ (I)

(阪大) 白田　平 (1948. 4. 30)

"Fully normal" トイフ概念ハ Tukey ガ "convergence and uniformity in topology" [I] ニオイテ導入シタヤウニ思ハレルガ. コノ概念ヲ用ヒルト local property ヲ uniformly local property ニ改メルコトガ出来ル (§1) 且距離空間ノ場合ノ角谷先生ガ出サレタ定理1ヨリ簡単ナ且見透シノヨイ証明ヲ与ヘルコトガ出来ル.

§2ニオイテ A. Weil ガ Sur les Espaces à structure uniforme et sur la topologie generale [II] ニオイテ予想シタ問題ノアル種ノ解ヲ与ヘ. §3デ fully normal space ノ今迄ノ空間ノ分類ニオケル位置ニツイテ論ズル. 尚未解ナ問題モ多ク残ッテヰルノデソレハ次回ニ述ベルコトニスル. コヽデ改メテ常ニ御指導下サッテヰル寺阪　小松両先生ニ深ク謝意ヲ表スルモノデス.

§1. [定義] 空間 R ノ open covering $\mathfrak{U}$ (必ラズシモ有限トハ限ラナイガ) open covering $\mathfrak{V}$ ノ (Δ)- <u>refinement デアル</u>トハ 次ノトキニ云フ.

即チ $(\forall U \in \mathfrak{U})(\exists V \in \mathfrak{V}) \begin{pmatrix} V \supset \sum U_\lambda \\ U_\lambda \cap U \neq 0 \\ U_\lambda \in \mathfrak{U} \end{pmatrix}$

コレヲ $\mathfrak{U}^* < \mathfrak{V}$ ト記ス.

[定義] open covering ガ <u>normal</u> open covering デアルトハ open covering ノ sequence $\{\mathfrak{U}_n\}$ ガ存在シテ

(1) $\mathfrak{U} \overset{*}{>} \mathfrak{U}_0 \quad \mathfrak{U}_n \overset{*}{>} \mathfrak{U}_{n+1} \quad ; \ n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

ナルトキニ云フ.

[定義] T_1- space R ガ <u>fully normal</u> デアルトハ スベテノ open covering ガ normal デアルトキニ云フ.

(注) 以下 open covering ノコトヲ単ニ covering ト記スコトニスル.

[定理 1] uniform structure $\mathfrak{X}$ ガ hereditary property P ヲ局所的ニ有スレバ且 $\mathfrak{X}$ ノ位相ガ fully normal デアルナラバ

P ヲ uniformly local property トシテ有スルヤウナ X ノ structure ヲ作ルコトガ出来ル.

且 更ニ溯リ X ノ改メラレタ uniformity (structure ヲ作ル covering ノ system) ヲ $\{\mathfrak{U}_a | A\}$ トスレバ

$$(\forall a \in A)\ (\forall p \in X)\ (S(p, \mathfrak{U}_a) \text{ ハ性質 } P \text{ ヲ有スル})$$

ヤウニ出来ル. コヽデ $S(p, \mathfrak{U}_a)$ ハ p ヲ含ム $\mathfrak{U}_a$ ノ element ノ和集合 即チ p ノ近傍ノ甚コトデアル.

(証明) 仮定ニヨリ X ノ structure ノ uniformity ヲ $\{\mathfrak{U}_b | B\}$ トスレバ $(\forall p \in X)\ (\exists b(p) \in B)\ (S(p, \mathfrak{U}_{b(p)})$ ハ性質 P ヲ有スル$)$ $\mathfrak{U} = \{S(p, \mathfrak{U}_{b(p)}) \mid p \in X\}$ ハ X ノ covering 且 X ガ fully normal デアルコトヨリ covering ノ sequence $\{\mathfrak{U}'_n\}$ ガ (I) ヲ満足スルヤウニ存在スル. 今 $\mathfrak{U}_a = \mathfrak{U}_b \wedge \mathfrak{U}'_n$ $n = 1, 2, \cdots$ $b \in B$ ナル covering ヲ作ル. コヽデ $\mathfrak{U}_a$ ハ $\mathfrak{U}_b$ ノ element ト $\mathfrak{U}'_n$ ノ element トノ共通部ガ全体ヨリナル covering ノコトデアル. 然ラバ $\{\mathfrak{U}_a\}$ ハ X ノ structure ヲ作ルコトガ分ル. ナゼナラバ X ノ一点 p ノ近傍 $U(p)$ ニ對シテ

$$U(p) \supset S(p, \mathfrak{U}_b)$$

デアルヤウナ b ガ存在スル. 然ルニ $\mathfrak{U}_b > \mathfrak{U}_a = \mathfrak{U}_b \wedge \mathfrak{U}'_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ デアルカラ. 即チ $\mathfrak{U}_a$ ノ element ハ $\mathfrak{U}_b$ ノドレカ一ツノ element ノ中ニ含マレルカラ $U(p) \supset S(p, \mathfrak{U}_b) \supset S(p, \mathfrak{U}_a)$

且 $S(p, \mathfrak{U}_a)$ ハ開集合デアルコトヨリ $\{\mathfrak{U}_a\}$ ハ X ノ topology ト一致スル uniformity デアルコトガ分ル. コノトキ.

$$\forall a \in A = \{(b, n) \mid b \in B,\ n = 1, 2, \cdots\} \quad \forall p \in X \quad \exists U \in \mathfrak{U}$$

$$S(p, \mathfrak{U}_a) \subset S(p, \mathfrak{U}_n) \subset S(p, \mathfrak{U}_0) \subset U \in \mathfrak{U}$$

トナルカラ且 U ハ性質 P ヲ有スル. 又ビ P ノ hereditary property ナルコトヨリ $S(p, \mathfrak{U}_a)$ モ性質 P ヲ有スル.

(註) 証明デ分ルヤウニ、コノ定理ガ成立スルタメニ十分ナ條件ハ $\mathfrak{U}$ ガ normal ナルコトデアル.

次ニ定理1ハ例トシテ角谷先生ノ云ハレタ定理ヲ証明スル.

[定理2] metric space R ガ local property P ヲ有シ且ツ P ガ hereditary デアレバ、R ノ位相ヲ不変ニシテ P ガ uniformly local property ナル故ニ R ニ距離ヲ入レルコトガ出来ル.

(証明) metric space ハ fully normal デアル.((I)参照)
且 $\{S(x, 4^{-n}) | x \in R\} = \mathfrak{U}_n$ トスレバ. コレハ R ノ topology ト一致スル uniformity デアル. 即チ structure デアル. 仮定ニヨリ定理1ト同様ニ $\mathfrak{U}$ ヲ作リ (I) ヲ満足スル $\mathfrak{U}'_n$ $n = 1, 2, \cdots$ ヲ取ル.
且 $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{U}_n \wedge \mathfrak{U}'_n$ トスル. コノトキ $\mathfrak{V}_n >^* \mathfrak{V}_{n+1}$ $n = 1, 2, \cdots$ デアル.
且 $\{\mathfrak{V}_n\}$ ハ R ノ topology ト一致スル uniformity デアルコトハ明ラカ. 今 pseudo-ecart f ヲ次ノ様ニシテ作ル.

若シ $\forall n$ $x \in S(y, \mathfrak{V}_n)$ ナラバ $f(x,y) = 0$

$x \notin S(y, \mathfrak{V}_1)$ ナラバ $f(x,y) = 1$

$x \in S(y, \mathfrak{V}_n) - S(y, \mathfrak{V}_{n+1})$ ナラバ $f(x,y) = 2^{-n}$

且 $\rho(x,y) = \inf \left(\sum^n f(x_r, x_{r+1})\right)$ コヽデ $x_0 = x, \cdots, x_{n+1} = y$ 且スベテノ $n \geq 0$ トスベテノ X ノ点 $x_1, \cdots x_n$ ニツイテノ infimum ヲトル. 然ラバ $\frac{1}{4} f(x,y) \leq \rho(x,y) = f(x,y)$ 且 ρ ハ R ノ topology ト一致スル metric トナル. (Frink, 1939) コノ ρ ヲ使ッテ 且 $S(x, \frac{1}{4}) < S(x, \mathfrak{V}_1) < U \in \mathfrak{U}$
ナル U ガ存在スルカラ $S(x, \frac{1}{4})$ ハ性質 P ヲ有スル.
ナゼナラバ $\rho(xy) < \frac{1}{4}$ ナラバ $f(xy) < 1$ 依テ $x \in S(y, \mathfrak{V}_1)$

[定理3] metric space R ガ locally complete ナラバ. uniformly locally complete ナルヤウニ位相ヲ不変ニシテ距離ヲ入レルコトガ出来ル. 且ダカラ complete ニナル.

(証明) 定理2ニオケルヤウニ距離ヲ入レル. コノトキ $S(x, \frac{1}{4})$ ニオケル metric ρ ニ関スル Cauchy sequence ハ $\mathfrak{U}_n >^* \mathfrak{V}_n$ ナルコトヨリ勿論始メノ metric ニ関スル cauchy sequence デアルカラ仮定ニヨリ収斂スル.

〔定理4〕 *fully normal space* X ノアル *structure* ガ *locally compact* デアルナラバ、*uniformity* $\{\mathfrak{U}_a | A\}$ ガ存在シ且ソレハ *topology* ト一致シテ

$$(\forall a \in A)(\forall p \in X)(\forall n)(\overline{S^n(p, \mathfrak{U}_a)} \text{ ガ compact})$$

ナルヤウニ出来ル。コヽデ $S^n(p, \mathfrak{U}_a) = (S(S^{n-1}(p, \mathfrak{U}_a), \mathfrak{U}_a)$ 即チ $S^{n-1}(p, \mathfrak{U}_a)$ ト共通部分ヲ有スル $\mathfrak{U}_a$ ノ *element* ノスベテノ和集合デアル。

（証明） 定理Ⅰデ作ッタ *structure* ヲ用ヒレバヨイ。コノトキ、

$$(\forall p)(\forall a)\ (\overline{S(p, \mathfrak{U}_a)} \text{ ハ compact})$$

然ルニ $\mathfrak{U}_0 >^* \mathfrak{U}_a$ ト $\forall a \in A$ ニ關シテナルカラ、n ニ關スル帰納法ニヨリ 若シ $Q \subset X$ ガ *compact* デアルナラバ、$\overline{S(Q, \mathfrak{U}_a)}$ モ *compact* ナルコトヲ云ヘバヨイ　Q ノ *compact* ナルコトヨリ、

$$Q < \sum_{i=1}^{n} S(a_i\ \mathfrak{U}_a)$$

ナル a_i ガ存在スル。

$$S(Q, \mathfrak{U}_a) < \sum_{i=1}^{n} S^2(a_i, \mathfrak{U}_a) < \sum_{i=1}^{n} S(a_i, \mathfrak{U}_0)$$

依テ $\overline{S(Q, \mathfrak{U}_a)} < \sum_{i=1}^{n} \overline{S(a_i, \mathfrak{U}_0)}$

然ルニ右辺ハ *compact* 依テ左辺モ。

〔系〕 *metric space* R ガ *local compact* ナラバ 位相ヲ不変ニシテ *metric* ヲ改メ且 ソレヲ ρ デ表ハセバ、

$$(\forall p \in R)\quad (\overline{\rho(p, 1)} \text{ ハ compact})$$

ナルヤウニ出来ル。

証明ハ定理4及ビ定理2ノ証明ヨリ明ラカデアル。

§2. A. Weil ハ〔Ⅱ〕ノ終リデ如何ナル *space* デアレバソノアル *structure* ガ常ニ *complete* デアルヤウニスルコトガ出来ルカ？ ト云フコトヲ問題トシテ且恐ラク *normality* ハ必要デアロウト云ッテヰル。然シ Tukey ハ〔1〕デ *completely normal* デモソノ *a struct* 即チスベテノ *normal covering* ヨリナル *structure* ハ *complete* デナイコトヲ示シタ。即チコノ *space* ハ如何ナル *structure* ヲトッテモ完

シテ complete ニハナラヌ。ナゼナラバアル structure デ complete ナラバ、a-structure デモ complete デアルカラ。コヽデ fully normal space ノ a-structure ハ complete デアルコトヲ示ス。

〔定理5〕 fully normal space X ノ a-structure ハ complete デアル。

(証明) 若シ cauchy phalanx $X(\alpha|A)$ ガ収斂シナイモノトスレバ $(\forall p\in X)(\exists U(p): p$ ノ開近傍$)$ $(X(\alpha|A)$ ハ $U(p)$ デモ終ニナイ$)$

カカル $U(p)$ ノ集合ヲ $\mathfrak{U}$ トスレバ、$\mathfrak{U}$ ハ cauchy 且 X ガ fully normal ナルコトニヨリ $\mathfrak{U}$ ハ a-structure uniformity element トナル。依テ $\mathfrak{U} > \mathfrak{U}_1$ ナル $\mathfrak{U}_1$ モ

且 $(\forall p\in X)(X(\alpha|A)$ ハ $S(p, \mathfrak{U}_1)$ デ終結デナイ$)$

ナゼナラバ $S(p, \mathfrak{U}_1) \subset U \in \mathfrak{U}$ ナル U ガ存在シ コノ U ニ関シテハ $X(\alpha|A)$ ハ終結トナルコトハナイカラ。然ルニ $X(\alpha|A)$ ハ cauchy phalanx デアルカラ $(\exists p\in X)(X(\alpha|A)$ ハ $S(p, \mathfrak{U}_1)$ デ終結$)$ デナケレバナラヌ。コレハ矛盾スル。

(註) A. Weil ハ cauchy phalanx デハナク cauchy family ヲ用ヒテヰルガ ソノマヽコノ定理ハ cauchy family ヲ用ヒテモ同様デアル。

(註) topological group デソノ left invariant (right-invariant) structure ニ関シテノ complete ハ必ラズシモ group トハナラヌ。依テ topological group ハアル structure ニ関シテハソノ completion ハ常ニ group ニナルデアロウカ? トイフ問題ガ生ズル。コレノ答ノ一註トシテ ミンソノ topology ガ fully normal ナラバ completion ハ勿論 group トナルヤウニ structure ガ存在スルコトガ定理5ヨリ云ヘル。

定理5ヨリ a-structure 大切ナコトガ分ルガ、Tukey ハ[1]デ a^L structure ノ completion ハ a-structure ニナルカ? ハ未解デアルトシテヰル。コヽデコノ解ヲ与ヘル。

〔定理6〕 a-structure completion ハ a-structure デアル。

(証明) X ヲ T_1 ナ completely regular space トシ、ソノ normal covering ノ全体ノ system ヲ $\{\mathfrak{U}_a \mid A\}$ トスル. 即チコノ uniformity ヲ有スル structure ガ A-structure デアル. 今 $\{\mathfrak{U}_a\}$ ニ関スル cauchy phalanx デ equivalent ナモノ一組トシテ $\mathfrak{X}^*$ トキ 且 $\{\mathfrak{X}^*\} = X^*$ トシ X^* ノ structure ノ uniformity ノ basis ヲ次ノ様ニ定メル. U ヲ X ノ open set トシ

$U^* = \{\mathfrak{X}^* \mid \mathfrak{X}(\delta|\Delta) \in \mathfrak{X}^*$ ナラバ $\mathfrak{X}(\delta|\Delta)$ ハ U デ等終 $\}$

コノトキ $\mathfrak{U}_a^* = \{U^* \mid U \in \mathfrak{U}_a\}$ トシ 且 $\{\mathfrak{U}_a^* \mid A\}$ ヲ X^* ノ uniformity ノ basis トスルコトガ出来. 且コレガ completion デアルコトガワカル.

且. $\mathfrak{U}_a = \{U^* \frown X \mid U^* \in \mathfrak{U}_a^*\}$ ト, $x \in X$ = equivalent ナ cauchy phalanx ノ組 $\mathfrak{X}^*$ ト x ヲ同一視スレバナル.

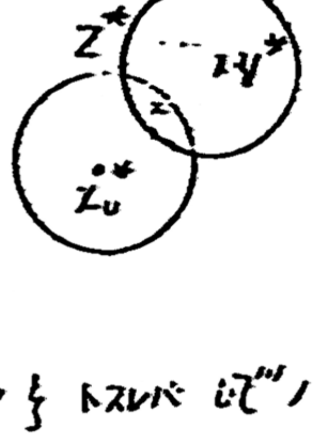
(小松氏: 位相空間論 及ビ Tukey [1] 参照)

サテ $\mathfrak{V}'$ ヲ X^* ノ任意ノ normal covering トスレバ $(\exists \mathfrak{U}_a^*\ a \in A)$ $(\mathfrak{V}' > \mathfrak{U}_a^*)$ ナルコトヲ云ヘバヨイ.

$\mathfrak{V}'$ ノ X^* ニオケル normality ヨリ

$(\exists \mathfrak{V}'', \mathfrak{V}''')(\mathfrak{V}' >^* \mathfrak{V}'', \mathfrak{V}'' >^* \mathfrak{V}'''$ 且 $\mathfrak{V}'''$ ハ X^* ノ normal covering)

コノトキ $\{\bar{U} \mid U \in \mathfrak{V}'''\} < \mathfrak{V}'$



ヲ云フ ナゼナラバ $U \ni x_0^*$ $\bar{U} \ni y^*$ ヲトレバ $S(y^*, \mathfrak{V}''') \frown U \ni z^*$ ナル z^* ガ存在スル. ダカラ $S^2(x_0^*, \mathfrak{V}''') \ni y^*$ ダカラ

$(\exists U' \in \mathfrak{V}')(U' \ni S^2(x_0^*, \mathfrak{V}''') \supset \bar{U})$

次ニ $\mathfrak{V}''' = \{U_\gamma \mid \Gamma\}$ トシ $\mathfrak{V} = \{X \frown U_\gamma \mid \Gamma\}$ トスレバ $\mathfrak{V}'''$ ノ normality ヨリ $\mathfrak{V}$ ハ X デ normal トナル. 故ニ $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_a$ ナル $a \in A$ ガ存在スル. コノトキ $\mathfrak{U}_a^*$ ガ云ヘル.

$U \in \mathfrak{U}_a^*$ トスレバ. $U = (X \frown U_\gamma)^*$ ナル $\gamma \in \Gamma$ ガ存在スル.

$U \ni \mathfrak{X}^* \ni \mathfrak{X}(\delta|\Delta)$ トスレバ 定義ニヨリ $\mathfrak{X}(\delta|\Delta)$ ハ $X \frown U_\gamma$ デ等終

且ツカラ U_γ テモ等級デアル. 然ルニ $x(\delta|D)\to x^*$ ト x^* デナル. ナ
ゼナラバ x^* ノ任意ノ近傍ノ基 $S(x^*, \mathfrak{U}^*_{a'})$ ヲトレバ
$(\exists U^* \in \mathfrak{U}^*_{a'})(U^* \ni x^*$ 且 $U^* \subset S(x^*, \mathfrak{U}^*_{a'}))$
定義ニヨリ $x(\delta|D)$ ハ U デ終級 且ツカラ U^* デ且ツカラ $x(\delta|D)$ ハ
$S(x^*, \mathfrak{U}^*_{a'})$ デ等級デアルカラ.
ツカラ $x^* \in \overline{U_\gamma}$ 　然ルニ $(\exists V \in \mathfrak{V})(V \supset \overline{U_\gamma})$
依テ $V \supset \overline{U_\gamma} \supset U$ 　即チ $\mathfrak{U}^*_a$ ニ属スルスベテノ openset ニ對シ $\mathfrak{V}'$ ノ element ガ存在シテソレヲ含ムカラ $\mathfrak{U}^*_a < \mathfrak{V}'$ ガ云ヘタ.

93. ココデハ fully normal space ノ位置ニツイテ論ズル.

fully normal ナラバ勿論 normal デアル. 且 compact completely regular space ハ fully normal 且 metric space ハ fully normal デアルコトガ分ル ([1] 参照)

然ラバ completely normal space ハ fully normal カ?

コレハ否定サレル.

【例 1】 C ヲ非可附番集合ト, 且 $\mathfrak{C}$ ヲソノ可附番部分集合ノ体系トスル. 且 zorn ノ lemma ニヨリ包含関係ニヨル大小関係デ maximal linearly-ordered subfamily ガ $\mathfrak{C}$ ノ中ニ存在スル. コレヲ Γ トス 且 Γ ニ次ノ如キ位相ヲ導入スル. ϕ ノ近傍ハ $\{\phi\}$ トスル. コヽデ ϕ ハ空集合 且 $\{c\}$ 　$\gamma' \leq \gamma$ ナラバ $\Gamma_{\gamma'}(\gamma) = \{\beta \mid \gamma' \leqq \beta < \gamma,\ \beta \in \Gamma\}$ ヲ γ ノ近傍ニトル. コノトキ Γ ハ completely normal space ドナリ且ツソノ a-structure ハ complete デハナイ ([1], p 77)
然ルニ fully normal ナラバ, a-structure ハ complete デアル. 依テ Γ ハ fully normal デハナイ ([定理 5])
実際 Γ ノ normal covering ハアル $S_\gamma = \{\beta \mid \beta > \underset{\beta\in\Gamma}{\gamma}\}$ ヲ含マネバナラヌコトガ云ヘル. 然ルニ $\{\Gamma_\gamma(\gamma) \mid \forall \gamma \in \Gamma\}$ ハドノ S_γ ヲモ含ミ得ナイ. 依テコノ covering ハ normal デハナイ 即チ Γ ハ fully normal デハナイ.

【例 2】 fully normal デ completely normal デナイ例トシテ

i) $I_1=\{\mu \mid 1\leqq\mu\leqq\omega\}$ $I_2=\{\lambda \mid 1\leqq\lambda\leqq\omega_1\}$

且 I_1 ハ ω ノミヲ claoter point トシテ有シ I_2 ハ順序ニヨル通常ノ topology ヲ有スルモノトスレバ.

$I_1\times I_2$ ハ compact デアルカラ fully normal. シカシ. completely normal デナイコトハヨク知ラレテヰル.

ii) parallelotope $I^{\aleph}$ デ $\aleph>\aleph_0$ ナラバ コレハ要求ヲ満足スル例デアル. ナゼナラバ $I^{\aleph_1}$ ハ $I_1\times I_2$ ヲ位相的ニ含ムカラ.

〔例3〕 completely normal ヲ強メテ

若シ2ツノ閉集合 F_1 F_2 ガ fremd ナラバ.

$$(\exists f)\,\Big(0\leqq f(x)\leqq 1 \quad 且 \quad \begin{array}{ll} f(x)=0 & x\in F_1,\\ f(x)=1 & x\in F_2\end{array} \quad 且 f(x) ハ連続\Big)$$

ト云フ以上ニ $\{x\mid f(x)=0\}=F_1$ $\{x\mid f(x)=1\}=F_2$ トナルヤウナ強イ意味デノ completely normal 且 fully normal ナ space ーデ強イ意味デノ completely normal デナイ例トシテ I_2 ヲ挙ゲルコトガ出来ル. ナゼナラバ ω_1 ハ閉集合且 $G\delta$ 集合デナイ. 然ルニ強イ意味デノ completely normal デアルナラバ, スベテノ閉集合ハ $G\delta$ 集合トナルカラ.

〔例4〕 compact ナ normal space ハ fully normal デアルコトハ既ニ云ッタ. 然ラバ locally compact ナラバ fully normal デアロウカ? コレハ否定サレル. 大体 fully normality ハ空間全体ニ関スル性質デアルガ一方 locally compact ハソウデナイカラ否定サレ得ルコトハ殆ンド自明ナノデアルガ 例トシテ例1ノ空間 Γ ヲ挙ゲルコトガ出来ル. ナゼナラバ Γ ハ locally compact トナルカラ

$\Gamma\ni\gamma$ $\Gamma_\phi(\gamma)$ ヲトル. $\overline{\Gamma_\phi(\gamma)}=\{\beta\mid 至キ\beta\leqq\gamma\}=\Gamma_\phi(\gamma)$

且 β_α ナル $\overline{\Gamma_\phi(\gamma)}$ ノ phalanx ヲ考ヘル. $\bigcup_\alpha\beta_\alpha=\beta$ トスレバ.

$\beta\in\Gamma$ 且 $\beta_\alpha\to\beta$ トナル.

先ヅ $(\forall\gamma\in\Gamma)$ γ ハスベテノ β_α ヨリ大キイカ又ハ然ラズ.

前者ノトキ $\beta<\gamma$. 後者ノトキ $\beta>\gamma$ 後テ Γ ノ極大性ヨリ $\beta\in\Gamma$ 且

$\beta_\alpha \to \beta$ ナルコトハ明ラカ. 亦 $\beta < \gamma$ デアルカラ $\beta \in \overline{\Gamma_\alpha(\gamma)}$